и применяет их к различным геометрическим вычислениям, результаты которых мы и в настоящее время получили бы тем же самым способом, что и он, с помощью вышеприведенных интегральных формул, с той лишь разницей, что не повторяли бы в каждом отдельном случае доказательства путем исчерпывания. Среди этих теорем первая находится во введении к трактату „О коноидах и сфероидах", вторая — в добавлении к теореме 10 о спиралях. Это следующие теоремы:

$$\frac{n^2}{2}h < h + 2h + 3h + \ldots + nh < \frac{(n+1)^2}{2}h,$$

$$\frac{n^3}{3}h^2 < h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \ldots + (nh)^2 < \frac{(n+1)^3}{3}h^2.$$

Первая теорема получается непосредственно из суммирования членов арифметической прогрессии, операции, известной, несомненно, уже давно; вторая основывается на данном в теореме 10 суммировании рассматриваемого ряда.

Архимед находит, что

$$3[h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \ldots + (nh)^2] =$$
$$= (n+1)(nh)^2 + h(h + 2h + 3h + \ldots + nh);$$

h, $2h$ и т. д. изображены отрезками, и если мы примем h за единицу и обозначим через s искомую сумму квадратов, то доказательство Архимеда можно изобразить следующим образом:

$$(n+1)n^2 = n^2 + [(n-1)+1]^2 + [(n-2)+2]^2 + \ldots +$$
$$+ [2 + (n-2)]^2 + [1 + (n-1)]^2 + n^2 =$$
$$= 2s + 2(n-1) + 4(n-2) + 6(n-3) + \ldots + 2(n-1)\cdot 1.$$

Прибавив к этому

$$(n + n - 1 + n - 2 + \ldots + 1),$$

получаем:

$$2s + n + 3(n-1) + 5(n-2) + \ldots + (2n-1)\cdot 1.$$

Но эта сумма равна $3s$, как это легко видеть, взяв сумму нижеследующих равенств, вытекающих, в свою очередь, из формулы для суммы членов арифметической прогрессии:

$$n^2 = n + 2(n - 1 + n - 2 + \ldots + 1),$$
$$(n-1)^2 = n - 1 + 2(n - 2 + n - 3 + \ldots + 1),$$
$$(n-2)^2 = n - 2 + 2(n - 3 + n - 4 + \ldots + 1).$$

. . . .

Следует заметить, что хотя суммирование членов ряда $h^2 + (2h)^2 + \ldots$ как будто по внешности нечто второстепенное, но в исследовании Архимеда оно представляет важный алгебраический результат.